Série d'exercices N° 5
Les algorithmes d'approximation

Exercice 1

La valeur de **π / 4** peut être approchée comme la somme des n premiers termes de la suite suivantes :

$U_0 = 1$, $U_n = (-1)^n / (2n + 1)$

1) Ecrire l'algorithme d'une fonction **f** qui renvoie le $n^{ième}$ terme de la suite.
2) Ecrire l'algorithme de la fonction **pi (n)** qui renvoie l'approximation de π calculée à partir des n premiers termes de la suite **U**.

Exercice 2

Ecrire un programme Python qui permet de calculer et afficher le point fixe de la fonction **f(x) =** $\sqrt{1+x}$

Exercice 3

Soit la formule suivante qui permet de déterminer une valeur approchée de Cos(x) :

$$\mathbf{Cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots}$$

Ecrire un algorithme d'un intitulé **calculCos** qui permet de :

- Saisir un réel **x** appartenant à l'intervalle **[-1, 1]**,
- Calculer et afficher une valeur approchée de **Cos(x)** en utilisant la formule donnée ci-dessus, le calcul s'arrête lorsque la différence entre deux termes consécutifs devient inférieure à **10^{-1}**.

Exercice 4

Soit l'algorithme ci-dessous de la fonction rectangle permettant de calculer, en utilisant la méthode des rectangles, l'aire résultante de la courbe de la fonction $\mathbf{f(x) = \frac{6}{1+x}}$ sur un intervalle **[a, b]** subdivisé en n rectangles.

```
Fonction rectangle (a, b : Réel ; n : Entier) : Réel
Début
        h ← (b – a) / n
        S ← 0
        x ← 0
        Pour i de 1 à n faire
                S ← S + 6 / (1 + x)
                x ← x + h
        Fin Pour
        Retourner S * h
Fin
```

M. Zouari Lazhar

Pour chacune des questions suivantes, valider chaque proposition par V si la réponse est correcte ou par F dans le cas contraire.

1) La fonction rectangle permet de calculer l'aire résultante de la courbe de la fonction f sur un intervalle [a, b] selon la méthode des :

   ☐ Rectangles à gauche

   ☐ Rectangles du point milieu

   ☐ Rectangles à droite

2) Pour les valeurs a = 1, b = 5 et n =4, le résultat retourné par la fonction rectangle est :

   ☐ 5.5

   ☐ 7.7

   ☐ 10.12

3) Pour appliquer la méthode des trapèzes au lieu de la méthode des rectangles, on remplace l'instruction de calcul de la somme S par :

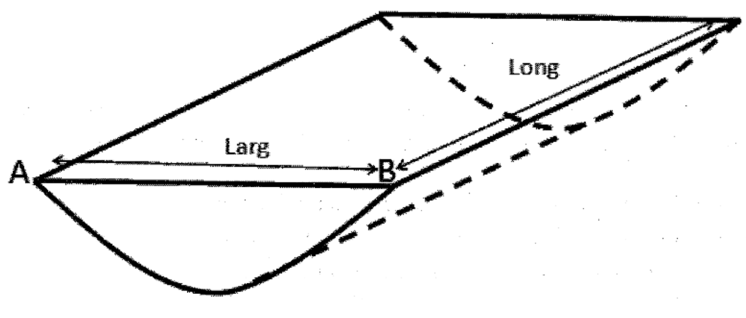
   ☐ S ← S + (6 / (1 + x) + 6 / (1 + x + h)) / 2

   ☐ S ← S + 6 / (1 + x + h) / 2

   ☐ S ← S + (6 / (1 + x) – 6 / (1 + x + h)) / 2

Exercice 5

Dans le but de creuser une rivière de largeur **Larg** mètres, d'une rive **A** à une rive **B**, et de longueur **Long** mètres, une société de travaux publics veut déterminer le volume approximatif de sable à enlever. La forme de la partie enlevée est obtenue par la représentation graphique de la fonction **f** définie par **f(x) = -3 * sin(x)** comme illustré ci-dessous :



Travail demandé :

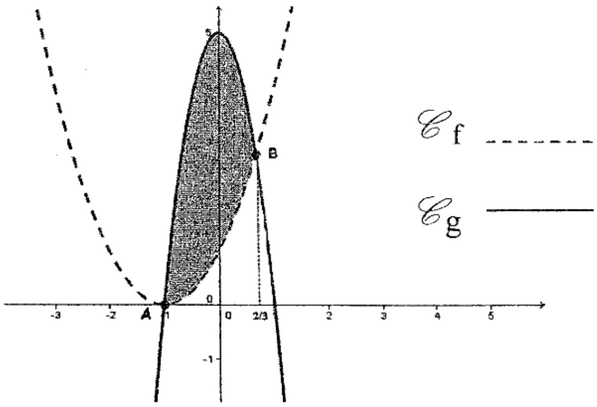
Ecrire un algorithme d'une module qui permet de calculer une valeur approchée du volume de sable à enlever entre les deux rives **A** et **B** pour creuser la rivière, pou un nombre de subdivisions **N**.

Exercice 6

Afin de calculer le coût de la réalisation d'un lac artificiel, un payagiste a besoin de déterminer sa surface, qui est représentée par l'air **S** délimitée par les courbes de deux fonctions **f** et **g** qui se croisent en deux points **A** et **B**, ayant respectivement les abscisses **-1** et **2/3**, comme le montre la figure ci-dessous.

Les deux fonctions **f** et **g** sont définies par :

- **f(x) = x^2 +2x + 1**
- **g(x) = -5 x^2 + 5**



Travail demandé :

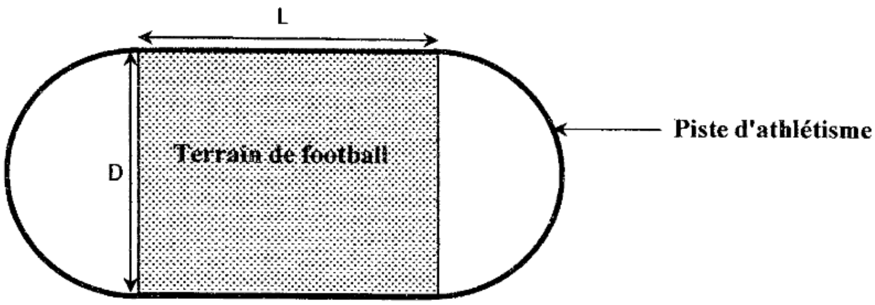
Ecrire un algoritme d'un module permettant de déterminer un valeur approchée de l'aire **S** délimitée par les deux courbes des deux fonction **f** et **g** définies dans l'intervalle **[A, B].**

Exercice 7

La direction d'une association sportive veut construire un stade formé par une piste d'athlétisme et un terrain de football, tout en cherchant à maximiser la surface de ce dernier.

Le terrain de football est un rectangle de langueur **L**, de largeur **D** et de surface **S**.

La piste d'athlétisme est de langueur P et formée par les deux arrêtes parallèles du terrain de football (de longueur **2 * L**) et les deux demi-cercles de diamètre **D** (de longueur **π * D**), comme le montre le schéma suivant :



Puisque S = L * D et P = 2 * L * π * D alors S = L * (P – 2 * L) / π

Travail demandé :

Etant donné que **L** varie de **0** à **P / 2**, écrire un algorithme d'une fonction qui permet de déterminer, à ε près, la longueur optimale **Lopt** correspondante à la surface maximale **Smax** du terrain, sachant que ε et **P** sont déjà saisis dans l'algorithme du prrogramme principal.